3 Nombres rationnels, nombres réels.

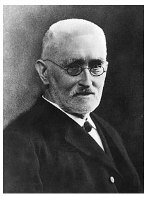
Objectifs :

- Associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel, et réciproquement
- Représenter un intervalle de la droite numérique. Déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné.
- Donner un encadrement, d'amplitude donnée, d'un nombre réel par des décimaux.
- Dans le cadre de la résolution de problèmes, arrondir en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation.

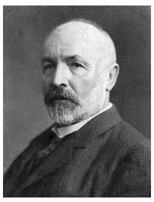
Aperçu historique :

Les Grecs connaissaient les entiers et les rationnels et s'arrêtaient là : Pythagore (572-497 av. JC) sait que la diagonale du carré n'est pas un rationnel, et ne la considère donc pas comme un nombre. Il n'y a de « beau » que les nombres, sous-entendu les entiers.
Aristote (384-322 av. JC) confirme ce point de vue en ménageant tout de même une place à la diagonale du carré. Il distingue deux catégories : les nombres et les grandeurs. Ce qui pour Aristote justifie cette séparation est la conception du discret, opposé au continu. Les longueurs, aires, angles sont à mettre dans la deuxième catégorie et sont donc avant tout des objets géométriques.
Euclide (environ 300 av JC) entérine la distinction d'Aristote. Dans les Éléments, il se base sur l'intuition géométrique du monde qui nous entoure pour définir points, droites et tous autres objets géométriques pour lesquels il énonce nombre de beaux théorèmes.

Jusqu'à la fin du 18 ème siècle, pour décrire et mesurer le monde qui nous entoure, les mathématiciens utilisent les nombres réels en recherchant des approximations rationnelles de ces nombres. Les réels n'ont pas été définis (au sens moderne de la définition), mais concevoir les nombres réels comme des « limites de nombres rationnels » en un sens un peu flou, convient bien à tout le monde. Ce n'est que suite aux travaux de Bolzano (1781-1848), Cauchy (1789-1857) et d'autres, qui essaient de clarifier les notions de continuité et de convergence, que l'on commence à sentir vraiment que la compréhension que l'on a des nombres réels manque de fondations. Au début du 19 ème siècle, Weierstrass (1815-1897) ébranle encore un peu plus la communauté en construisant un exemple de fonction continue ("dont on peut tracer le graphe sans lever le crayon") dérivable nulle part (dont la courbe n'admet de tangente en aucun point). Le problème de définir $\mathbb{R}$ correctement est alors bien posé sur la table, et le 19 ème siècle verra plusieurs réponses différentes, quoique équivalentes.
Dedekind (1831-1916) propose de construire $\mathbb{R}$ par une théorie des coupures. Cantor (1845-1918) construit $\mathbb{R}$ en ajoutant aux rationnels les limites de suites de Cauchy ; c'est le procédé de complétion qui est celui que l'on enseigne en général aujourd'hui pour construire le corps des réels. Weierstrass donne lui aussi une construction de $\mathbb{R}$.



Richard Dedekind



Georg Cantor

Karl Weierstrass

1. Les ensembles $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

A. Les nombres rationnels.

On rappelle que l'ensemble des nombres entiers naturels $\{0;1;2;3;4;5;6;...\}$ se note $\mathbb{N}$,
et que l'ensemble des nombres entiers relatifs $\{...;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5;6;...\}$ se note $\mathbb{Z}$.

Définition 3.1 Un nombre ***rationnel*** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.
Tout nombre rationnel admet une écriture fractionnelle ***irréductible*** unique $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, telle que le seul diviseur commun à p et q soit 1.

Exemple $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ $\quad \frac{14}{-21} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{14}{-21} = -\frac{2}{3}$ $\quad \frac{2{,}5}{0{,}7} \in \mathbb{Q}$ car $\frac{2{,}5}{0{,}7} = \frac{25}{7}$
En particulier, tout nombre entier ou entier relatif est aussi un nombre rationnel. Par exemple, $5 = \frac{5}{1}$, donc $5 \in \mathbb{Q}$.
On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Propriété 3.1 (admise) : Tout nombre rationnel admet un développement décimal ***périodique à partir d'un certain rang*** .

Exemple $\frac{1}{3} = 0{,}3333\underline{3}...$ $\quad \frac{13193}{49950} = 0{,}26412412\underline{412}...$ $\quad 2 = 2{,}000\underline{0}$ $\quad \frac{3}{4} = 0{,}7500\underline{0}...$

B. Le cas particulier des nombres décimaux.

Définition 3.2 Un ***nombre décimal*** est un nombre rationnel qui peut s'écrire $\frac{a}{10^n}$, avec $4 \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemple $\frac{1}{2} \in \mathbb{D}$ car $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ $\quad 5 \in \mathbb{D}$ car $10^0 = 1$ et $5 = \frac{5}{1} = \frac{5}{10^0}$.
On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Propriété 3.2 (Caractérisation) : Un nombre est décimal si et seulement si il peut d'écrire sous la forme $\frac{a}{2^m \times 5^p}$, avec $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$.

Démonstration Démonstration en exercice.

Exemple $\frac{-3}{50} \in \mathbb{D}$ car $\frac{-3}{50} = \frac{-3}{2 \times 5^2}$
$\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ (sera démontré en exercice).

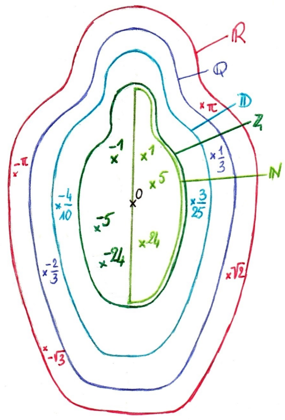
C. Les nombres réels.

Définition 3.3 Un ***nombre réel*** est un nombre qui peut s'écrire avec une partie entière et un nombre fini ou infini de décimales.
L'ensemble des nombres rées est noté $\mathbb{R}$.

Exemple Les nombres réels permettent d'attribuer une mesure à toute grandeur.
Par exemple, la diagonale d'un carré de côté 1 mesure $\sqrt{2} \simeq 1{,}4142135623....$
Et le quotient de la mesure du périmètre d'un cercle quelconque par celle de son diamètre est $\pi \simeq 3{,}1415926535....$

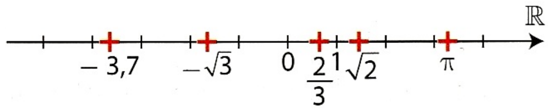
Remarque 3.1 On note $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}-\{0\}$ l'ensemble des nombres réels différents de zéro.
On note $\mathbb{R}-\{1;2\}$ l'ensemble des nombres réels différents de 1 et de 2.
On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls.
$\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble des nombres réels strictement positifs, et $\mathbb{R}_-^*$ l'ensemble des nombres réels strictement négatifs.

On a donc $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.
Les ensembles ci-dessus sont inclus les uns dans les autres "comme des poupées russes".



Propriété 3.3 (admise) : Soit une droite graduée (ou droite numérique).

- A tout point de cette droite graduée est associé un unique nombre réel, son abscisse.
- Réciproquement, à tout nombre réel est associé un unique point de cette droite graduée.



Remarque 3.2 Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont dits ***irrationnels*** .
Par exemple, $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel (Voir DM03.A).

D. Encadrement des nombres réels par des nombres décimaux.

Définition 3.4 Donner un ***encadrement décimal*** d'un nombre réel, c'est donner deux nombres **décimaux** d_1 et d_2 tels que le nombre **réel** x vérifie :

$$d_1 \leqslant x \leqslant d_2$$

.
La différence d_2-d_1 est appelée ***amplitude*** de l'encadrement.
On dira que l'on a un encadrement à 10^{-n} près ($n\in\mathbb{N}$) si l'amplitude de l'encadrement est 10^{-n}.

Exemple $1,4\leqslant\sqrt{2}\leqslant 1,5$ est un encadrement décimal d'amplitude 10^{-1}, ou à 10^{-1} près.

Définition 3.5 Avec les mêmes notations, l'arrondi de x à 10^{-n} près est celui des nombres d_1 ou d_2 qui est le plus proche de x.
Si d_1 et d_2 sont à égale distance de x, l'arrondi de x à 10^{-n} près est d_2.

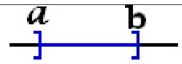
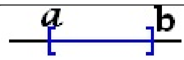
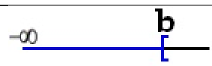
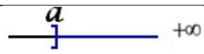
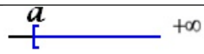
Exemple

Comme $\sqrt{2}\simeq 1,4142135623...$, on a l'encadrement à 10^{-3} près $1,414\leqslant\sqrt{2}\leqslant 1,415$ et l'arrondi à 10^{-3} près de $\sqrt{2}$ est $1,414$.

Comme $\pi\simeq 3,1415926535...$, l'arrondi de π à 10^{-4} près est $3,1416$.
L'arrondi de π à 10^{-3} près est $3,142$.

2. Intervalles de ℝ, valeur absolue.

A. Intervalles de ℝ.

L'ensemble des nombres réels x tels que :	Est un intervalle et se note :	Schéma :
$a < x < b$	$]a;b[$	
$a \leq x < b$	$[a;b[$	
$a < x \leq b$	$]a;b]$	
$a \leq x \leq b$	$[a;b]$	
$x < b$	$]-\infty;b[$	
$x \leq b$	$]-\infty;b]$	
$x > a$	$]a;+\infty[$	
$x \geq a$	$[a;+\infty[$	

Remarque 3.3 L'amplitude de l'intervalle $[a;b]$ est $b-a$.
Le centre de cet intervalle est $\frac{a+b}{2}$.

B. Distance entre deux réels, valeur absolue d'un réel.

Définition 3.6 La ***distance entre deux nombres réels*** est la différence entre le plus grand et le plus petit des deux nombres.
Elle correspond à la distance qui sépare les points représentant les nombres sur la droite graduée.

Exemple La distance entre les réel $7,4$ et 10 est $10-7,4=2,6$.

Définition 3.7 Soient $a,b \in \mathbb{R}$. On appelle ***valeur absolue*** de $b-a$ et note $|b-a|$ la distance entre les réels a et b.

On a donc : $\begin{cases} |b-a| = b-a \text{ si } b-a \geqslant 0 \\ |b-a| = -(b-a) = a-b \text{ si } b-a \leqslant 0 \end{cases}$

Exemple $|\pi-3| = \pi-3$, car $\pi-3$ est positif.
$|\sqrt{2}-2| = 2-\sqrt{2}$, car $\sqrt{2}-2$ est négatif.

Définition 3.8 La ***valeur absolue d'un nombre réel*** x est la distance entre se nombre et 0.
Elle se note $|x|$.

On a donc : $\begin{cases} |x| = x \text{ si } x \geqslant 0 \\ |x| = -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$

Exemple $|5| = 5$, car 5 est positif. $|-\pi| = \pi$, car $-\pi$ est négatif.
$|-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, car $-\frac{1}{2}$ est négatif. $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, car $\sqrt{2}$ est positif.

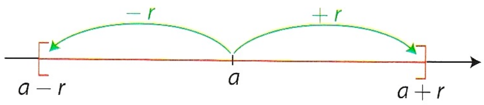
Propriété 3.4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$

Démonstration Par définition, $\sqrt{x^2}$ est le nombre réel positif qui au carré donne x^2.
Or les deux nombres positifs qui au carré donnent x^2 sont x et $-x$.
Donc $\sqrt{x^2}$ est le nombre positif parmi x et $-x$, donc par définition, c'est $|x|$.

Remarque 3.4 Attention, $-x$ n'est pas forcément négatif ! ! !
Par exemple si $x=-3$, alors x est négatif, et $-x=3$, donc c'est $-x$ qui est positif.

C. Lien entre valeur absolue et intervalles.

Définition 3.9 Soient a un nombre réel r un nombre réel strictement positif.
$|x-a| \leqslant r$ équivaut à $x \in [a-r; a+r]$



Démonstration $|x-a| \leqslant r$ signifie que la distance entre x et a est inférieure ou égale à r,
c'est-à-dire :
$x-a \leqslant r$ si $x \geqslant a$ ou $a-x \leqslant r$ si $x \leqslant a$
c'est-à-dire :
$x \leqslant a+r$ si $x \geqslant a$ ou $a-r \leqslant x$ si $x \leqslant a$
Ainsi, pour tout nombre réel x, $|x-a| \leqslant r$ équivaut à $a-r \leqslant x \leqslant a+r$, c'est-à-dire à $x \in [a-r; a+r]$.

Remarque 3.5 On dit parfois que a est le centre et r le rayon de l'intervalle $[a-r; a+r]$.

3. Synthèse sur les nombres rationnels et réels.

....
....
....
....
....
....
....
....